Dupliquée d'une Algèbre et le Théorème d'Etherington*

Artibano Micali
Département des Sciences Mathématiques
Université de Montpellier II
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier, France

et

Moussa Ouattara
de Institut de Mathématiques et de Physique
Université de Ouagadougou
03 B.P. 7021 Ouagadougou 03
Burkina Faso (Upper Volta)

Submitted by Richard A. Brualdi

ABSTRACT

Le but de cet article est d'expliciter la structure de la dupliquée d'une algèbre. On montre que, sur un corps commutatif K, si la sous-algèbre A^2 d'une K-algèbre A est une algèbre pondérée, une T-algèbre ou une algèbre génétique, alors la dupliquée $D(A)$ de l'algèbre A est respectivement, une algèbre pondérée, une T-algèbre ou une algèbre génétique. Une application de ce résultat montre que, en caractéristique différente de 2, la dupliquée de toute algèbre de Bernstein est une algèbre génétique. Enfin, sur un anneau commutatif K à élément unité, si A est une K-algèbre telle que le K-module A^2 soit projectif et si $A = A^2$ alors les algèbres de Lie des dérivations (resp. les groupes d'automorphismes) de A et de $D(A)$ sont isomorphes.

This paper concerns the duplication of an algebra in connection with Etherington's theorem.

1. DUPLIQUEE D'UNE ALGEBRE

Soient K un anneau commutatif à élément unité, A une K-algèbre commutative non nécessairement associative ni ayant un élément unité et

*Partially supported by Programme CAMPUS.

655 Avenue of the Americas, New York, NY 10010 0024-3795/91/$3.50

$S_K^2(A)$ la seconde puissance symétrique du K-module A (cf. [4]). Considérons la surjection K-linéaire canonique $A \otimes_K A \to S_K^2(A)$, $x \otimes y \mapsto x \cdot y$ où $x \cdot y$ désigne le produit symétrique de x par y, avec x, y dans A. La multiplication $(x \cdot y)(x' \cdot y') = xy \cdot x'y'$ [resp. $(x \otimes y)(x' \otimes y') = xy \otimes x'y'$] avec x, y, x', y' parcourant A, définit sur $S_K^2(A)$ [resp. $A \otimes_K A$] une structure de K-algèbre commutative (resp. non commutative) appelée le *dupliquée commutative* (resp. *non commutative*) de A. La dupliquée de A, commutative ou non commutative, est notée $D(A)$. Toutefois, si une assertion n'est vraie que pour l'une de ces dupliquées, ceci sera précisé. Il existe bien sûr, des propriétés vraies pour la dupliquée non commutative qui ne le sont pas pour la dupliquée commutative (cf. paragraphe 8).

L'application K-linéaire $\mu : D(A) \to A^2$ définie par $x \cdot y \mapsto xy$ est un morphisme surjectif de K-algèbres et si $N(A)$ désigne son noyau, on a un isomorphisme de K-algèbres $D(A)/N(A) \approx A^2$. De plus, $D(A)N(A) = N(A)D(A) = 0$.

Si A^2 est un K-module projectif, la suite exacte de K-modules

$$0 \to N(A) \to D(A) \xrightarrow{\mu} A^2 \to 0$$

est scindée, c'est-à-dire, il existe une application K-linéaire $\eta : D(A) \leftarrow A^2$ telle que $\mu \circ \eta = \mathrm{id}_{A^2}$. On a ainsi une application K-bilinéaire $\varphi : A^2 \times A^2 \to N(A)$ définie par $(x, y) \mapsto \eta(x)\eta(y) - \eta(xy)$ qui jointe à la condition $D(A)N(A) = N(A)D(A) = 0$ nous permet de définir sur le produit

$$D(A) = A^2 \underset{\text{s.d.}}{\times} N(A)$$

(s.d. pour semi-direct) une structure d'algèbre donnée par $(x, x')(y, y') = (xy, \varphi(x, y))$ pour x, y parcourant A^2 et x', y' parcourant $N(A)$. Autrement dit, $D(A)$ est une extension de l'algèbre A^2 par le A^2-bimodule trivial $N(A)$ et φ en est son "factor set" (cf. [6]).

Ceci nous permet d'énoncer le résultat suivant (cf. [7]):

Théorème 1.1 (Théorème d'Etherington). *Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K-algèbre telle que l'idéal A^2 de A soit un K-module projectif. Alors*

$$D(A) \approx A^2 \underset{\text{s.d.}}{\times} N(A)$$

est un produit semi-direct d'algèbres.

Nous montrerons ici que les propriétés de l'algèbre $D(A)$ sont induites par celles de A^2 plutôt que de l'algèbre A comme cela apparaissait jusqu'alors dans la littérature.

Dans les paragraphes 2 et 3, K sera un corps commutatif et toute algèbre sera commutative de dimension finie sur K. D'autre part, les théorèmes 5.4 et 6.1, énoncés dans le cas de la dupliquée commutative, s'étendent au cas de la dupliquée non commutative.

2. ALGEBRES GENETIQUES

Soit A une K-algèbre. On note, pour a dans A, $R_a : A \to A$, $x \mapsto xa$, la multiplication à droite par a et $R(A)$ l'ensemble de toutes les multiplications à droite. L'algèbre enveloppante de l'ensemble $\{I\} \cup R(A)$, où I est l'application identité, est appelée l'*algèbre des transformations* de A et est notée $T(A)$. Chaque élément T de $T(A)$ peut s'écrire sous la forme $T = \alpha I + f(R_{x_1}, R_{x_2}, \ldots)$ avec α dans K, les x_i dans A, où f est un polynôme.

On dira qu'une K-algèbre A est *pondérée* s'il existe un morphisme non nul d'algèbres $\omega : A \to K$. On définit les puissances principales x^k d'un élément x de A par $x^1 = x$ et $x^k = x^{k-1}x$, $k = 2, 3, \ldots$. Une K-algèbre pondérée (A, ω) est dite *T-algèbre* si les coefficients de son équation rang ne dépendent de x qu'à travers son poids $\omega(x)$, c'est-à-dire, qu'il existe des constantes $\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}$ dans K telles que $x^r + \beta_1\omega(x)x^{r-1} + \cdots + \beta_{r-1}\omega(x)^{r-1}x = 0$, pour tout x dans A. Le plus petit entier r sera appelé le *rang* de A. Une K-algèbre pondérée (A, ω) est une *algèbre génétique* (au sens de Schafer) si les coefficients de la fonction caractéristique $|\lambda I - T|$ de $T = \alpha I + f(R_{x_1}, R_{x_2}, \ldots)$ ne dépendent des x_i qu'à travers leurs poids $\omega(x_i)$ (cf. [14]).

LEMME 2.1. *Soient A une K-algèbre et $D(A)$ sa dupliquée. Si la sous-K-algèbre A^2 est pondérée alors $D(A)$ est pondérée.*

Soit $\omega : A^2 \to K$ une pondération de A^2. Le morphisme composé

$$\omega' : D(A) \xrightarrow{\mu} A^2 \xrightarrow{\omega} K,$$

nécessairement non nul, est une pondération de $D(A)$.

THÉORÈME 2.2. *Soit A une K-algèbre telle que A^2 soit une T-algèbre de rang r. Alors $D(A)$ est une T-algèbre de rang au plus $r+1$.*

Comme A^2 est une T-algèbre de rang r, il existe des scalaires $\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}$ dans K tels que $x^r + \beta_1\omega(x)x^{r-1} + \cdots + \beta_{r-1}\omega(x)^{r-1}x = 0$, pour tout x dans A^2. Soit y dans $D(A)$. Puisque $\mu(y)$ est dans A^2 alors $[\mu(y)]^r + \beta_1\omega(\mu(y))[\mu(y)]^{r-1} + \cdots + \beta_{r-1}\omega(\mu(y))^{r-1}\mu(y) = 0$. Mais μ étant un morphisme d'algèbres, on a $\mu(y^r + \beta_1\omega'(y)y^{r-1} + \cdots + \beta_{r-1}\omega'(y)^{r-1}y) = 0$, i.e., le crochet est dans $N(A)$ et comme $D(A)N(A) = 0$ alors $y^{r+1} + \beta_1\omega'(y)y^r + \cdots + \beta_{r-1}\omega'(y)^{r-1}y^2 = 0$, pour tout y dans $D(A)$. Ainsi $D(A)$ est une T-algèbre de rang $\leqslant r+1$.

Théorème 2.3. *Soit A une K-algèbre. Si A^2 est une algèbre génétique alors $D(A)$ est une algèbre génétique.*

Soit A une K-algèbre de dimension n. On a $\dim_K D(A) = \frac{1}{2}n(n+1)$ et si $\dim_K N(A) = m$ alors $\dim_K A^2 = \frac{1}{2}n(n+1) - m = p$. Soit $y = x + u$ dans $D(A)$, avec x dans A^2 et u dans $N(A)$. On note R_y^* la multiplication à droite par y dans $D(A)$. On a $R_y^*(z+v) = (z+v)(x+u) = zx + \varphi(z,x) = (R_x^0 + g_x)(z)$, où R_x^0 est la multiplication à droite par x dans A^2 et $g_x : A^2 \to N(A)$, $z \mapsto \varphi(z,x)$ est une application K-linéaire. Par conséquent, dans une base de $D(A) = A^2 \oplus N(A)$ la matrice de R_y^* est de la forme

$$R_y^* = \begin{pmatrix} R_x^0 & 0 \\ g_x & 0 \end{pmatrix},$$

où R_x^0 et g_x sont des matrices $p \times p$ et $m \times p$ respectivement. Alors, pour tout polynôme f, on a

$$f(R_{y_1}^*, R_{y_2}^*, \ldots) = \begin{pmatrix} f(R_{x_1}^0, R_{x_2}^0, \ldots) & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

quels que soient $y_i = x_i + u_i$ avec x_i dans A^2 et u_i dans $N(A)$.

Soit $T^* = \alpha I^* + f(R_{y_1}^*, R_{y_2}^*, \ldots)$ un élément de $T(D(A))$. De ce qui précède, il vient que $|\lambda I^* - T^*| = (\lambda - \alpha)^m |(\lambda - \alpha)I - f(R_{x_1}^0, R_{x_2}^0, \ldots)| = (\lambda - \alpha)^m |\lambda I - T^0|$ où $T^0 = \alpha I + f(R_{x_1}^0, R_{x_2}^0, \ldots)$ est dans $T(A^2)$ et I est la matrice identité de A^2. Ainsi, du fait que l'algèbre A^2 est génétique, la fonction caractéristique de T^* ne dépend des y_i qu'à travers leurs poids $\omega'(y_i) = \omega(\mu(y_i)) = \omega(x_i)$. Donc $D(A)$ est une algèbre génétique.

En fait, cette démonstration est due à Schafer (cf. [14, théorème 3]), mais dans son théorème il avait supposé que A est une algèbre génétique.

Une K-algèbre pondérée (A, ω) est une *T-algèbre spéciale* si $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ est nilpotent et les sous-algèbres N^k, définies inductivement par $N^1 = N$, $N^k = NN^{k-1}$ pour $k \geqslant 2$, sont des idéaux de A.

Toute T-algèbre spéciale est une algèbre génétique (cf. [14, théorème 2]).

3. ALGEBRES DE BERNSTEIN

Une K-algèbre commutative pondérée (A, ω) est une *algèbre de Bernstein* si $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2$, pour tout x dans A (cf. [8]). En caractéristique différente de 2, toute algèbre de Bernstein A admet la décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$, où e est un idempotent non nul de A, $U = \{x | x \in A, ex = \frac{1}{2}x\}$, $V = \{x | x \in A, ex = 0\}$ et les composantes U et V sont reliées par les relations $U^2 \subseteq V$, $UV \subseteq U$, $V^2 \subseteq U$, $UV^2 = 0$ (cf. [12], [16] ou [17]).

Une algèbre de Bernstein A est dite *nucléaire* si $A^2 = A$, ce qui équivaut à $V = U^2$, pour tout choix de l'idempotent e dans A. Pour toute algèbre de Bernstein A, la sous-algèbre A^2 est une algèbre de Bernstein nucléaire. Dans [11], les Auteurs ont démontré que pour toute algèbre de Bernstein nucléaire A, l'annulateur de $N = \mathrm{Ker}(\omega)$, $\mathrm{Ann}(N)$, est un idéal de A avec $V^2 \subseteq \mathrm{Ann}(N)$ et $(uv_1)v_2 + (uv_2)v_1$ est dans $\mathrm{Ann}(N)$, quels que soient u dans U et v_1, v_2 dans V. Si (A, ω) est une algèbre de Bernstein, B une K-algèbre quelconque et $f: A \to B$ un morphisme non nul d'algèbres, alors $(f(A), \omega')$ est une algèbre de Bernstein avec $\omega'(f(x)) = \omega(x)$, pour tout x dans A et $\overline{N} = \mathrm{Ker}(\omega') = f(N)$.

THÉORÈME 3.1. *Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Toute K-algèbre de Bernstein nucléaire est une T-algèbre spéciale satisfaisant l'équation $x^4 - \frac{3}{2}\omega(x)x^3 + \frac{1}{2}\omega(x)^2 x^2 = 0$.*

Soit A une K-algèbre de Bernstein nucléaire. Considérons l'algèbre de Bernstein quotient $B = A/\mathrm{Ann}(N)$. Alors, pour tout $\bar{x}$ dans B, on a $\bar{x}^3 - \omega'(\bar{x})\bar{x}^2 = 0$, où $\omega': B \to K$ est une pondération de B, i.e., si $\pi: A \to B$ désigne le morphisme canonique de K-algèbres de Bernstein alors $\omega'(\pi(x)) = \omega(x)$, pour tout x dans A (cf. [11, théorème 3.1]). D'après un résultat dû à Abraham (cf. [1]), toute T-algèbre de rang $\leqslant 3$ est une T-algèbre spéciale. Par conséquent B est une T-algèbre spéciale, donc $\overline{N} = \pi(N)$ est nilpotent, i.e., il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que $\overline{N}^k = 0$. Comme π est un morphisme d'algèbres, on a $[\pi(N)]^k = \pi(N^k) = 0$ donc $N^k \subseteq \mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Ann}(N)$ soit $N^{k+1} = 0$. Puisque N est nilpotent, A est une T-algèbre spéciale (cf. [16, §3, proposition 1]). Soit maintenant x dans A. On a $[\pi(x)]^3 - \omega'(\pi(x))[\pi(x)]^2 = \pi[x^3 - \omega(x)x^2] = 0$, donc $x^3 - \omega(x)x^2 \in \mathrm{Ann}(N)$, pour tout x dans A. Soient

$A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de Peirce de A relative à un idempotent e et $x = \omega(x)e + u + v$ un élément de A. On a $x^3 - \omega(x)x^2 = -\frac{1}{2}\omega(x)v^2 + u^2v + 2(uv)v$ dans U et $[x^3 - \omega(x)x^2]x = \omega(x)e[x^3 - \omega(x)x^2] + (u+v)[x^3 - \omega(x)x^2] = \omega(x)e[x^3 - \omega(x)x^2] = \frac{1}{2}\omega(x)[x^3 - \omega(x)x^2]$, donc $x^4 - \frac{3}{2}\omega(x)x^3 + \frac{1}{2}\omega(x)^2x^2 = 0$, pour tout x dans A.

La première assertion du théorème 3.1 est due à Odoni et Stratton (cf. [11]). Le théorème lui-même généralise le théorème 1 de [8].

THÉORÈME 3.2. *Si K est un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et (A, ω) une K-algèbre de Bernstein, la dupliquée de A est une algèbre génétique vérifiant l'équation* $x^5 - \frac{3}{2}\omega(x)x^4 + \frac{1}{2}\omega(x)^2x^3 = 0$.

Si (A, ω) est une algèbre de Bernstein, la sous-algèbre A^2 est de Bernstein nucléaire. D'après le théorème 3.1, l'algèbre A^2 est une T-algèbre spéciale donc une algèbre génétique. Le théorème 2.3 nous dit alors que $D(A)$ est une algèbre génétique. La dernière assertion du théorème découle du théorème 2.2.

On peut se demander si le théorème 3.2 peut être amélioré. La remarque qui suit nous laisse peu d'espoir. En effet, l'algèbre zygotique $Z(n+1,2)$ de l'héritage mendélien simple est une algèbre de Bernstein satisfaisant l'équation $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$. Sa dupliquée, l'algèbre des couples (en anglais: "copular algebra") n'est ni une algèbre de Bernstein, ni une T-algèbre spéciale.

4. DUPLICATION ET EXTENSION D'ALGEBRES

Il se pose ici le problème suivant: si $\mathscr{C}$ désigne une classe d'algèbres et si A est une algèbre quelconque, à quelles conditions la dupliquée de A appartiendra-t-elle à $\mathscr{C}$?

On a vu (cf. 1) que $D(A)$ est une extension de l'algèbre A^2 par le A^2-bimodule trivial $N(A)$ et que l'application bilinéaire $\varphi: A^2 \times A^2 \to N(A)$, $(x, y) \mapsto \eta(x)\eta(y) - \eta(xy)$ est le "factor set" de l'extension.

LEMME 4.1. *Soient $\mathscr{C}$ une classe d'algèbres et A une K-algèbre où K est un anneau commutatif à élément unité. L'algèbre $D(A)$ est dans $\mathscr{C}$ si et seulement si l'algèbre A^2 est dans $\mathscr{C}$ et φ est un 2-cocycle de A^2 à coefficients dans $N(A)$ (cf. [6]).*

Examinons ceci sur quelques classes d'algèbres.

(i) Algèbres Associatives

Une algèbre est dite *associative* si elle vérifie $x(yz) = (xy)z$. La condition de 2-cocycle est donnée par $xh(y,z) + h(x,yz) - h(x,y)z - h(xy,z) = 0$.

Donc, pour une algèbre A, l'algèbre $D(A)$ est associative si et seulement si A^2 est une algèbre associative et $\varphi(x, yz) = \varphi(xy, z)$, quels que soient x, y, z dans A^2.

THÉORÈME 4.2. *Soient K un corps commutatif, A une K-algèbre de dimension finie et $D(A)$ sa dupliquée. Si* $\dim_K A^2 = 1$ *alors $D(A)$ est associative.*

L'hypothèse $\dim_K A^2 = 1$ entraîne que la sous-algèbre A^2 est associative. De plus, de la bilinéarité de φ, il vient que $\varphi(x, yz) = \varphi(xy, z)$, quels que soient x, y, z dans A^2.

(ii) Algèbres de Jordan

Une K-algèbre est dite de *Jordan* si elle vérifie $xy = yx$ et $x^2(yx) = (x^2y)x$. La condition de 2-cocycle est donnée par $h(x, y) = h(y, x)$ et $[h(x, x)y]x + h(x^2, y)x + h(x^2y, x) - x^2h(y, x) - h(x, x)(yx) - h(x^2, yx) = 0$. Donc, pour une algèbre commutative A, la dupliquée commutative $D(A)$ est de Jordan si et seulement si la sous-algèbre A^2 est de Jordan, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ et $\varphi(x^2y, x) = \varphi(x^2, yx)$, quels que soient x, y dans A^2.

Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Une K-algèbre de Bernstein (A, ω) est dite *triviale* si $N^2 = 0$, où $N = \mathrm{Ker}(\omega)$. Si $A = Ke \oplus U \oplus V$ est la décomposition de Peirce de A relative à un idempotent e, la table de multiplication de A s'écrit $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$ pour tout u dans U, les autres produits étant nuls. L'algèbre $A^2 = Ke \oplus U$ est une algèbre élémentaire, i.e., elle vérifie $xy = \frac{1}{2}[\omega(x)y + \omega(y)x]$ quels que soient x, y dans A^2. Soient x et y dans A^2. On a $x^2 = \omega(x)x$ et $x^2(yx) = (x^2y)x$, donc A^2 est de Jordan. De même $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ et $\varphi(x^2y, x) = \varphi(x^2, yx)$, quels que soient x, y dans A^2, d'où la proposition suivante:

PROPOSITION 4.3. *La dupliquée commutative de toute algèbre de Bernstein triviale est une algèbre de Jordan.*

Il existe des algèbres de Jordan dont la dupliquée n'est pas de Jordan [exemple: l'algèbre zygotique $Z(n+1, 2)$]. Il existe aussi des algèbres qui ne sont pas de Jordan mais dont la dupliquée est de Jordan.

EXEMPLE 4.4. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et $A = Ke \oplus U \oplus V$ une algèbre de Bernstein vérifiant $U^2 = 0$ et $V^2 \neq 0$. Alors A n'est pas de Jordan, sinon on aurait $V^2 = 0$ (cf. [12, lemme 6.2.3]). La sous-algèbre $A^2 = Ke \oplus U$ est une algèbre élémentaire, donc aussi de Jordan. De $x^2 = \omega(x)x$, pour tout x dans A^2 et du fait que φ est bilinéaire symétrique, il vient que $\varphi(x^2y, x) = \varphi(x^2, yx)$, quels que soient x, y dans A^2. Donc $D(A)$ est une algèbre de Jordan.

5. DERIVATIONS

Soient K un anneau commutatif à élément unité, A une K-algèbre commutative et $D(A)$ sa dupliquée commutative. On sait que pour tout morphisme $K \to L$ d'anneaux commutatifs à élément unité, il existe un isomorphisme de L-algèbres $D(A) \otimes_K L \approx D(A \otimes_K L)$ et, en particulier, pour tout idéal premier $\wp$ de K, un isomorphisme de $K_\wp$-algèbres $D(A)_\wp \approx D(A_\wp)$. De même, on a un isomorphisme de L-algèbres $A^2 \otimes_K L \approx (A \otimes_K L)^2$ et pour tout idéal premier $\wp$ de K, un isomorphisme de $K_\wp$-algèbres $(A^2)_\wp \approx (A_\wp)^2$. La suite exacte de K-modules $0 \to N(A) \to D(A) \to A^2 \to 0$ nous fournit une suite exacte de $K_\wp$-modules $0 \to N(A_\wp) \to D(A_\wp) \to (A_\wp)^2 \to 0$ pour tout idéal premier $\wp$ de K. En particulier, si A^2 est K-projectif, le scindage

$$D(A) \approx A^2 \underset{\text{s.d.}}{\times} N(A)$$

nous fournit un scindage

$$D(A_\wp) \approx (A_\wp)^2 \underset{\text{s.d.}}{\times} N(A_\wp)$$

pour tout idéal premier $\wp$ de K.

Comme la dupliquée d'une zéro-algèbre est une zéro-algèbre on supposera, par la suite, que l'on a toujours $A^2 \neq 0$.

LEMME 5.1. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K-algèbre commutative telle que A^2 soit un K-module projectif. Alors* $\operatorname{Ann}(D(A)) = N(A)$ *et pour toute K-dérivation d de $D(A)$, $d(N(A)) \subseteq N(A)$.*

En effet, la condition $D(A)N(A) = 0$ entraîne, sans autre hypothèse, que $N(A) \subseteq \operatorname{Ann}(D(A))$. Réciproquement, supposons que A^2 soit un K-module projectif donc, par localisation, que A^2 soit libre et soit (e_i) une base de A^2 sur K. Si $x \cdot y$ est dans $\operatorname{Ann}(D(A))$ alors $xy = \sum_i \alpha_i e_i$ (somme finie) où les α_i sont dans K. Or, on sait que pour tout élément $x' \cdot y'$ dans $D(A)$ on a $(x \cdot y)(x' \cdot y') = xy \cdot x'y' = 0$ donc pour tout indice j, $xy \cdot e_j = \sum_i \alpha_i e_i \cdot e_j = 0$ ce qui entraîne que $\alpha_i = 0$ pour tout i. Ceci nous montre que $x \cdot y$ est dans $N(A)$ d'où l'inclusion $\operatorname{Ann}(D(A)) \subseteq N(A)$. Finalement, si $x \cdot y$ est dans $N(A)$, pour tout élément $x' \cdot y'$ dans $D(A)$ et pour toute K-dérivation d de $D(A)$ on a $0 = d((x \cdot y)(x' \cdot y')) = d(x \cdot y)(x' \cdot y') + (x \cdot y)d(x' \cdot y') = d(x \cdot y)(x' \cdot y')$ donc $d(x \cdot y)$ est dans $\operatorname{Ann}(D(A)) = N(A)$. Le lemme est démontré.

Pour toute K-dérivation d de A, on note $\tilde{d}: D(A) \to D(A)$ l'application K-linéaire définie par $x \cdot y \mapsto d(x) \cdot y + x \cdot d(y)$. Il est clair que $\tilde{d}$ est une

K-dérivation de $D(A)$ et que l'application K-linéaire $\psi : \mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{Der}_K(D(A))$ définie par $d \mapsto \tilde{d}$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

LEMME 5.2. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K-algèbre commutative telle que A^2 soit un K-module projectif. Alors:*

(i) *Pour toute K-dérivation d de $D(A)$ l'application K-linéaire composée $\pi(d) = \mu \circ d \circ \eta : A^2 \to A^2$ est une K-dérivation de A^2. De plus, l'application K-linéaire $\pi : \mathrm{Der}_K(D(A)) \to \mathrm{Der}_K(A^2)$ est un morphisme surjectif d'algèbres de Lie.*

(ii) *Pour toute K-dérivation d de A, on a $\pi(\tilde{d}) = d|_{A^2}$.*

En effet, quels que soient les éléments x, y dans A^2 on a $\pi(d)(xy) = \mu(d(\eta(xy))) = \mu(d(\eta(xy) - \eta(x)\eta(y))) + \mu(d(\eta(x)\eta(y))) = \mu(d(\eta(x))\eta(y) + \eta(x)d(\eta(y))) = \pi(d)(x)y + x\pi(d)(y)$. Pour montrer que π est un morphisme d'algèbres de Lie il suffit de montrer que quelles que soient les dérivations d, d' de $D(A)$ on a $\pi(d) \circ \pi(d') = \pi(d \circ d')$. Or, pour tout $x = \sum_i x_i' x_i''$ dans A^2 on peut prendre $\eta(x) = \sum_i x_i' \cdot x_i''$ donc $\pi(d)(\pi(d')(x)) = \pi(d)(\mu(d'(\sum_i x_i' \cdot x_i'')))$ et si l'on pose $d'(\sum_i x_i' \cdot x_i'') = \sum_j y_j' \cdot y_j''$ alors

$$\begin{aligned}
\pi(d) \circ \pi(d')(x) &= \pi(d)\Big(\sum_j y_j' y_j''\Big) = \mu \circ d\Big(\eta\Big(\sum_j y_j' y_j''\Big)\Big) \\
&= \mu \circ d\Big(\sum_j y_j' \cdot y_j''\Big) = \mu \circ d \circ d'\Big(\sum_i x_i' \cdot x_i''\Big) \\
&= \mu \circ d \circ d' \circ \eta(x) = \pi(d \circ d')(x).
\end{aligned}$$

La surjectivité de π découle de [10, lemme 6.1.5].

Pour ce qui est de (ii), notons que pour toute K-dérivation d de A et pour tout élément $x = \sum_i x_i' x_i''$ dans A^2 on a

$$\begin{aligned}
\pi(\tilde{d})(x) &= \mu \circ \tilde{d}(\eta(x)) = \mu \circ \tilde{d}\Big(\sum_i x_i' \cdot x_i''\Big) \\
&= \sum_i \mu(d(x_i') \cdot x_i'' + x_i' \cdot d(x_i'')) \\
&= \sum_i [d(x_i')x_i'' + x_i' d(x_i'')] = d\Big(\sum_i x_i' x_i''\Big) = d(x).
\end{aligned}$$

COROLLAIRE 5.3. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K-algèbre commutative telle que le K-module* A^2 *soit projectif. Si* $A = A^2$ *le morphisme d'algèbres de Lie* $\psi : \mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{Der}_K(D(A))$ *est injectif.*

Ceci est une conséquence immédiate de la condition (ii) du lemme 5.2.

THÉORÈME 5.4. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K-algèbre commutative telle que le K-module* A^2 *soit projectif. Si* $A = A^2$, *le morphisme d'algèbres de Lie* $\psi : \mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{Der}_K(D(A))$ *est un isomorphisme.*

En effet, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Der}_K(D(A)) \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Der}_K(A^2) \\ \mathrm{Der}_K(A) \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{Der}_K(A^2)$, $d \mapsto d|_{A^2}$ est le morphisme de restriction. Si $A = A^2$ on a $\pi \circ \psi = \mathrm{id}$ et montrons que l'on a aussi $\psi \circ \pi = \mathrm{id}$. En effet, pour toute K-dérivation d de $D(A)$ et quels que soient les éléments $x = \sum_i x_i' x_i''$ et $y = \sum_j y_j' y_j''$ dans $A^2 = A$ on a

$$\begin{aligned} \psi \circ \pi(d)(x \cdot y) &= x \cdot \pi(d)(y) + \pi(d)(x) \cdot y \\ &= \Big(\sum_i x_i' x_i''\Big) \cdot \mu\Big(d\Big(\sum_j y_j' \cdot y_j''\Big)\Big) + \mu\Big(d\Big(\sum_i x_i' \cdot x_i''\Big)\Big) \cdot \Big(\sum_j y_j' y_j''\Big) \\ &= \Big(\sum_i x_i' \cdot x_i''\Big) d\Big(\sum_j y_j' \cdot y_j''\Big) + d\Big(\sum_i x_i' \cdot x_i''\Big)\Big(\sum_j y_j' \cdot y_j''\Big) \\ &= d\Big(\Big(\sum_i x_i' \cdot x_i''\Big)\Big(\sum_j y_j' \cdot y_j''\Big)\Big) = d\Big(\Big(\sum_i x_i' x_i''\Big) \cdot \Big(\sum_j y_j' y_j''\Big)\Big) \\ &= d(x \cdot y). \end{aligned}$$

REMARQUES 5.5.

(i) Le théorème 5.4 est démontré dans la littérature sous différentes hypothèses. Dans [5], l'Auteur le démontre pour une algèbre commutative sur un corps de caractéristique différente de 2 et dans [9, théorème 2.1.1], les Auteurs le démontrent en supposant que l'algèbre soit un module plat sur un anneau commutatif à élément unité dans lequel l'homothétie définie par 2 est injective. Plus récemment, dans [13, proposition], l'Auteur montre que sur un anneau commutatif K à élément unité, si A est une K-algèbre vérifiant la condition $A^2 = A$, l'application K-linéaire $\mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{Der}_K(D(A))$, $d \mapsto \tilde{d}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie si et seulement si, pour toute dérivation d de $D(A)$ on a $d(N(A)) \subseteq N(A)$. Or, le théorème 5.4, nous dit que, pour cela, il suffit que le K-module A^2 soit projectif ce qui est toujours le cas si K est un corps. Par conséquent l'hypothèse que A a un idempotent est superflue dans [13, corollaire]. Nous avions déjà obtenu l'essentiel des résultats du §5 dans [10, théorème 6.1.6] par une méthode différente de celle suivie ici.

(ii) Disons enfin que le théorème 4.2 est la version, en dimension quelconque, du théorème 2 de [2]. En effet, si A est une algèbre non nécessairement commutative de dimension 2 sur un corps K avec la table de multiplication dans une base $\{u_1, u_2\}$ donnée par $u_i u_j = \alpha_{ij1} u_1 + \alpha_{ij2} u_2$ avec $\alpha_{ij1} + \alpha_{ij2} = 0$ alors $u_i u_j = \alpha_{ij1}(u_1 - u_2)$, i.e., la sous-$K$-algèbre A^2 est de dimension $\leqslant 1$. Donc $D(A)$ est associative.

L'exemple suivant nous montre que la condition $A^2 = A$ est essentielle.

EXEMPLE 5.6. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et (A, ω) une K-algèbre de Bernstein triviale de type $(1 + r, s)$. On sait que

$$\mathrm{Der}_K(A) \approx K^r \underset{\text{s.d.}}{\times} M_r(K) \times M_s(K)$$

où $M_t(K)$ est l'algèbre de Lie des matrices $t \times t$ à coefficients dans K. On suppose que $s \geqslant 1$ sinon on aurait $A = G(n, 2)$, l'algèbre élémentaire de dimension $n = 1 + r + s$ sur K et $A^2 = A$. On a

$$A^2 = G(1 + r, 2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Der}_K(A^2) \approx K^r \underset{\text{s.d.}}{\times} M_r(K).$$

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de A sur K avec $e_1^2 = e_1$, $e_1 e_i = \frac{1}{2} e_i$,

$i = 2, \ldots, r+1$, les autres produits étant nuls, la base correspondante dans $D(A)$ est $\{e_1, \ldots, e_{r+1}, e_{1r+2}, \ldots, e_{1n}, e_{22}, \ldots, e_{ij}, \ldots, e_{nn}\}$ $(2 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$, avec pour table de multiplication $e_1^2 = e_1$, $e_1 e_i = \frac{1}{2} e_i$, $e_i e_j = e_j e_i = \frac{1}{4} e_{ij}$, $2 \leqslant i \leqslant j \leqslant r+1$, les autres produits étant nuls. Les e_{1k} $(r+2 \leqslant k \leqslant n)$ et e_{ij} $(2 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$ forment une base de $N(A)$. Par conséquent $\dim_K N(A) = s + n(n-1)/2$ et φ a pour valeurs, $\varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i) = \frac{1}{4} e_{ij}$ $(2 \leqslant i \leqslant j \leqslant r+1)$ et $\varphi(e_k, e_l) = 0$ pour tout autre couple d'entiers (k, l). Les calculs nous montrent que les K-dérivations de $D(A)$ sont les applications K-linéaires $d: D(A) \to D(A)$ définies par

$$d(e_1) = \sum_{k=2}^{r+1} \alpha_k e_k, \qquad d(e_i) = \sum_{k=2}^{r+1} \left(\beta_{ki} e_k + \tfrac{1}{2} \alpha_k e_{ik}\right),$$

$$d(e_{ij}) = \sum_{k=2}^{r+1} \left(\beta_{ki} e_{kj} + \beta_{kj} e_{ki}\right), \qquad \text{pour} \quad 2 \leqslant i \leqslant j \leqslant r+1$$

et

$$d(e_{pq}) = \sum_{2 \leqslant k \leqslant l \leqslant n} \gamma_{kl,pq} e_{kl} + \sum_{r+1 \leqslant k \leqslant n} \mu_{pq,k} e_{1k}$$

pour tout autre couple d'entiers (p, q), où les paramètres α_k, β_{ki}, $\gamma_{kl,pq}$ et $\mu_{pq,k}$ sont dans K. Donc l'algèbre de Lie $\mathrm{Der}_K(D(A))$ est de dimension

$$r(r+1)\left[\frac{n(n-1)}{2} + s\right]\left[\frac{n(n-1)}{2} + s - \frac{r(r+1)}{2}\right].$$

En particulier, pour $n = 3$, $r = s = 1$, on a les isomorphismes de K-espaces vectoriels $\mathrm{Der}_K(D(A)) \approx K^{24}$, $\mathrm{Der}_K(A) \approx K^3$ et $\mathrm{Der}_K(A^2) \approx K^2$.

6. NOTE SUR LES AUTOMORPHISMES

Les résultats obtenus dans le paragraphe précédent concernant les dérivations restent encore vrais, mutatis mutandis, pour les automorphismes. Ainsi, à titre d'exemple, nous allons donner, pour les automorphismes, le correspondant du théorème 5.4.

THÉORÈME 6.1. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K-algèbre commutative telle que le K-module* A^2 *soit projectif. Si* $A = A^2$ *le* *morphisme de groupes* $\mathrm{Aut}_K(A) \to \mathrm{Aut}_K(D(A))$, $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ *où* $\tilde{\sigma}(x \cdot y) = \sigma(x) \cdot \sigma(y)$ *quels que soient* x, y *dans* A, *est un isomorphisme.*

7. NOTE SUR LE FONCTEUR D

Soient K un anneau commutatif à élément unité et A et B deux K-algèbres. Il est clair que si $D(A)$ est isomorphe à $D(B)$, les sous-algèbres A^2 et B^2 sont isomorphes mais A et B peuvent ne pas l'être. En effet, soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, A et B deux K-algèbres de Bernstein dont les tables de multiplication dans une base $\{e, e_1, e_2\}$ sont données respectivement par $e^2 = e$, $ee_1 = \frac{1}{2}e_1$, les autres produits étant nuls et $e^2 = e$, $ee_1 = \frac{1}{2}e_1$, $e_2^2 = e_1$, les autres produits étant nuls. On voit aisément que les sous-algèbres A^2 et B^2 sont isomorphes. Les tables de multiplication de $D(A)$ et $D(B)$, dans la base $\{e \cdot e, e \cdot e_1, e \cdot e_2, e_1 \cdot e_1, e_1 \cdot e_2, e_2 \cdot e_2\}$ sont données respectivement par $(e \cdot e)^2 = e \cdot e$, $(e \cdot e)(e \cdot e_1) = \frac{1}{2}e \cdot e_1$, $(e \cdot e_1)^2 = \frac{1}{4}e_1 \cdot e_1$, les autres produits étant nuls et $(e \cdot e)^2 = e \cdot e$, $(e \cdot e)(e \cdot e_1) = \frac{1}{2}e \cdot e_1$, $(e \cdot e)(e_2 \cdot e_2) = e \cdot e_1$, $(e \cdot e_1)^2 = \frac{1}{4}e_1 \cdot e_1$, $(e \cdot e_1)(e_2 \cdot e_2) = \frac{1}{2}e_1 \cdot e_1$, $(e_2 \cdot e_2)^2 = e_1 \cdot e_1$, les autres produits étant nuls. Si l'on remplace (changement de base) dans la base de $D(B)$ le vecteur $e_2 \cdot e_2$ par $e_2 \cdot e_2 - 2e \cdot e_1$ on voit immédiatement que les dupliquées $D(A)$ et $D(B)$ sont isomorphes. Néanmoins, les algèbres A et B ne le sont pas. En effet, la K-algèbre A est de Jordan tandis que la K-algèbre B ne l'est pas, car sinon on aurait $V^2 = 0$ où $V = Ke_2$ (cf. [12]), donc A et B ne sont pas isomorphes. Ceci nous montre, en particulier, que *le foncteur duplication D n'est pas pleinement fidèle.*

On a aussi un exemple d'une algèbre, en occurrence B, qui n'est pas de Jordan mais dont la dupliquée $D(B)$ est de Jordan (cf. proposition 4.3).

8. NOTE SUR LA DUPLIQUEE

Comme nous l'a bien fait remarquer le Referee, il existe des résultats valables pour la dupliquée non commutative qui ne le sont pas pour la dupliquée commutative. Par exemple, il existe un isomorphisme de K-algèbres, où K est un anneau commutatif à élément unité, entre la dupliquée non commutative du produit tensoriel de deux K-algèbres A et B et le produit tensoriel des dupliquées non commutatives $D(A)$ et $D(B)$ de A et B respectivement, i.e., $D(A \otimes_K B) \approx D(A) \otimes_K D(B)$, isomorphisme de K-algèbres.

Or, cet isomorphisme n'est pas, en général, vrai pour la dupliquée commutative. Nous montrerons, par la suite, que pour la dupliquée commutative, il existe un morphisme surjectif de K-algèbres $D(A\otimes_K B)\to D(A)\otimes_K D(B)$ et nous donnerons une description du noyau de ce morphisme.

On rappelle, tout d'abord, que si A et B sont deux K-algèbres, le K-module $A\otimes_K B$ est muni d'une structure naturelle de K-algèbre, l'algèbre produit tensoriel, à savoir, $(x\otimes y)(x'\otimes y')=xx'\otimes yy'$, quels que soient x,x', dans A et y,y' dans B. La seconde puissance symétrique $S_K^2(A)$ est ici munie de sa structure d'algèbre dupliquée commutative de la K-algèbre A, pour toute K-algèbre A.

L'application $(A\times B)\times(A\times B)\to S_K^2(A)\otimes_K S_K^2(B)$ définie par

$$((x,y),(x',y'))\mapsto(x\cdot x')\otimes(y\cdot y')$$

est K-linéaire en chaque variable donc elle induit une application K-bilinéaire symétrique

$$(A\otimes_K B)\times(A\otimes_K B)\to S_K^2(A)\otimes_K S_K^2(B)$$

définie par

$$(x\otimes y,x'\otimes y')\mapsto(x\cdot x')\otimes(y\cdot y')$$

et, par suite, une application K-linéaire unique

$$\varphi:S_K^2(A\otimes_K B)\to S_K^2(A)\otimes_K S_K^2(B)$$

rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes_K B)\times(A\otimes_K B) \arrow[r] \arrow[d] & S_K^2(A)\otimes_K S_K^2(B) \\
S_K^2(A\otimes_K B) \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

De plus, φ est une application K-linéaire surjective car elle vérifie $\varphi((x\otimes y)\cdot(x'\otimes y'))=(x\cdot x')\otimes(y\cdot y')$, quels que soient x,x' dans A et y,y' dans B. Finalement, φ est un morphisme de K-algèbres pour les structures d'algèbre dupliquée sur $S_K^2(A\otimes_K B)$ et d'algèbre produit tensoriel de $S_K^2(A)\otimes_K S_K^2(B)$. Il s'en suit (cf. [4, chapitre II, §3, No. 6, corollaire 1 de la proposition 6]) que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est l'idéal de $S_K^2(A\otimes_K B)$ engendré par les éléments de la forme $(x\otimes y)\cdot(x'\otimes y')-(x\otimes y')\cdot(x'\otimes y)$ pour x,x' parcourant A et y,y' parcourant B et ce noyau n'est pas, en général, nul.

Supposons, par exemple, que A et B soient des K-algèbres libres de bases $\{e_1,\dots,e_m\}$ et $\{f_1,\dots,f_n\}$ respectivement. Une base de $S_K^2(A\otimes_K B)$ est formée par les vecteurs $(e_i \otimes f_k)\cdot(e_j \otimes f_l)$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant m$ et quels que soient les indices k, l dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ plus les vecteurs $(e_i \otimes f_k)\cdot(e_i \otimes f_l)$ pour $i = 1, \dots, m$ et $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$ et le noyau de φ est l'idéal de $S_K^2(A \otimes_K B)$ engendré par les vecteurs $(e_i \otimes f_k)\cdot(e_j \otimes f_l) - (e_i \otimes f_l)\cdot(e_j \otimes f_k)$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant m$ et $1 \leqslant k < l \leqslant n$, c'est à dire, au total $\frac{1}{4}mn\,(m-1)(n-1)$ générateurs libres. Dans ce cas, il existe un isomorphisme de K-modules libres $S_K^2(A \otimes_K B) \approx [S_K^2(A) \otimes_K S_K^2(B)] \oplus \operatorname{Ker}(\varphi)$ et, en général, $\operatorname{Ker}(\varphi) \neq 0$. Par exemple, si $m = n = 2$, $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est engendré par le vecteur $(e_1 \otimes f_1)\cdot(e_2 \otimes f_2) - (e_1 \otimes f_2)\cdot(e_2 \otimes f_1)$.

BIBLIOGRAPHIE

1 V. M. Abraham, A note on train algebras, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) 20:53–58 (1976).

2 A. H. Boers, Duplication of algebras, *Indag. Math.* 44:121–125 (1982).

3 A. H. Boers, Duplication of algebras II, *Indag. Math.* 50:235–244 (1988).

4 N. Bourbaki, *Algèbre I*, Hermann, Paris, 1970, chapitres 1–3.

5 R. C. F. Costa, On the derivation algebra of zygotic algebras for polyploidy with multiple alleles, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* (1) 14:63–80 (1983).

6 S. Eilenberg, Extensions of general algebras, *Ann. Soc. Polon. Math.* 21:125–134 (1948).

7 I. M. H. Etherington, Duplication of linear algebras, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) 6:222–230 (1941).

8 P. Holgate, Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle, *J. London Math. Soc.* (2) 9:613–623 (1975).

9 A. Micali et al., Dérivations dans les algèbres gamétiques III, *Linear Algebra Appl.* 113:79–99 (1989).

10 A. Micali et M. Ouattara, Algèbres de Jordan génétiques, Colloque de Zaragoza, 13–14 Avril 1989; *Algebras, Groups and Geometries*, à paraître.

11 R. W. K. Odoni et A. E. Stratton, Structure of Bernstein algebras, *Algèbres Génétiques*, Cahiers Math. 38, Montpellier, 1989, pp. 117–125.

12 M. Ouattara, Algèbres de Jordan et Algèbres Génétiques, Cahiers Math. 37, Montpellier, 1988.

13 L. A. Peresi, A note on duplication of algebras, *Linear Alebra Appl.* 104:65–69 (1988).

14 R. D. Schafer, Structure of genetic algebras, *Amer. J. Math.* 71:121–135 (1949).

15 R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic, New York, 1966.

16 S. Walcher, Bernstein algebras which are Jordan algebras, *Arch. Math.* 50:218–222 (1988).

17 A. Wörz-Busekros, Bernstein algebras, *Arch. Math.* 48:338–398 (1987).

Received 13 March 1989; final manuscript accepted 1 September 1989